4 Bonus !

4.1 Étude des opérateurs de Hilbert-Schmidt (205, 208, 213) [21], [22]

Dans ce développement bonus qui remplacera peut-être Lax-Milgram, je détaille quelques propriétés des opérateurs de Hilbert-Schmidt, qui sont des opérateurs spéciaux, mais pas tant que ça étant donné que tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ avec $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini est un opérateur à noyau et réciproquement ! Commençons par définir ce qu'est un opérateur de Hilbert-Schmidt :

Définition 4.1 (Opérateur de Hilbert-Schmidt)**.** Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. On définit l'ensemble suivant :

$$\mathscr{HS}(H) := \left\{ T \in \mathscr{L}_c(H) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty \right\}.$$

Les éléments de cet ensemble sont appelés *opérateurs de Hilbert-Schmidt* de H.

On montre les propriétés suivantes :

Théorème 4.2. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de H. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1. $T \in \mathscr{HS}(H) \iff T^* \in \mathscr{HS}(H)$. De plus :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|Tf_p\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^*e_n\|^2.$$
2. La quantité :
$$\|T\|_{\mathscr{HS}} := \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2}$$
définit une norme euclidienne sur $\mathscr{HS}(H)$ munissant cet espace d'une structure d'espace de Hilbert. De plus, l'inclusion :
$$(\mathscr{HS}(H), \|\cdot\|_{\mathscr{HS}}) \longrightarrow \big(\mathscr{L}_c(H), \|\cdot\|_{\mathscr{L}_c(H)}\big)$$
est continue.
3. L'ensemble des opérateurs de rang fini sur H est dense dans $(\mathscr{HS}(H), \|\cdot\|_{\mathscr{HS}})$. En particulier, les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts.
4. Si $H = \mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ avec μ une mesure σ-finie et si H est séparable, alors l'application :
$$\begin{array}{ccc} \big(\mathrm{L}^2\left(\Omega^2, \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes \mu\right), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\mu\otimes\mu)}\big) & \longrightarrow & (\mathscr{HS}(H), \|\cdot\|_{\mathscr{HS}}) \\ K & \longmapsto & T_K : f \mapsto T_K f : x \mapsto \displaystyle\int_\Omega K(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \end{array}$$
est une isométrie bijective.

Démonstration. 1. Soit $T \in \mathscr{L}_c(H)$. La quantité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$$

est toujours bien définie, même si elle peut être infinie. En tous cas, l'égalité de Bessel-Parseval appliquée avec la base hilbertienne $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}|\langle Te_n,f_p\rangle|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|\langle Te_n,f_p\rangle|^2$$

d'après le théorème de Fubini-Tonnelli. En passant à l'adjoint et en ré-utilisant l'égalité de Bessel-Parseval avec la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|\langle e_n,T^*f_p\rangle|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\|T^*f_p\|^2.$$

Le caractère totalement arbitraire des bases hilbertiennes $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_p)_{n\in\mathbb{N}}$ donne donc :

$$\forall T\in\mathscr{L}_c(H),\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\|Tf_p\|^2$$

et également, donc :

$$\forall T\in\mathscr{L}_c(H),\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\|T^*e_n\|^2.$$

Si cette étape vous a paru un peu rapide, utilisez une troisième base hilbertienne $(g_q)_{q\in\mathbb{N}}$ (totalement arbitraire elle aussi !) comme intermédiaire. On a donc bien que $T\in\mathscr{HS}(H)$ si et seulement si $T^*\in\mathscr{HS}(H)$, ce qui conclut ce premier point.

2. Le premier point permet de montrer que l'application $\|\cdot\|_{\mathscr{HS}}$ est bien définie étant donné qu'elle ne dépend pas de la base hilbertienne considérée. Maintenant, si $T\in\mathscr{HS}(H)$ est tel que $\|T\|_{\mathscr{HS}}=0$, alors on a que $Te_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étant donné que T est linéaire et continue et que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, on a que $T=0$. On vérifie que $\|\cdot\|_{\mathscr{HS}}$ vérifie les autres axiomes de norme grâce à la linéarité de T et les propriétés de norme de $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$. De plus, il s'agit bien d'une norme euclidienne, induite par le produit scalaire suivant :

$$\forall S,T\in\mathscr{HS}(H),\quad \langle T,S\rangle_{\mathscr{HS}}:=\sum_{n=0}^{+\infty}\langle Te_n,Se_n\rangle.$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in H,\ \forall T\in\mathscr{HS}(H),\quad \|Tx\|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}|\langle Tx,e_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}|\langle x,T^*e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\sum_{n=0}^{+\infty}\|T^*e_n\|^2\\ &= \|x\|^2\|T^*\|^2_{\mathscr{HS}} = \|x\|^2\|T\|^2_{\mathscr{HS}}.\end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité de Bessel-Parseval dans la première égalité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le premier point disant que la norme Hilbert-Schmidt de T^* est la même que celle de T. On a donc montré :

$$\forall x\in H,\quad \|Tx\|\leqslant\|T\|_{\mathscr{HS}}\|x\|,$$

ce qui donne bien :

$$\|T\|_{\mathscr{L}_c(H)}\leqslant\|T\|_{\mathscr{HS}}.$$

Maintenant qu'on a montré cette inégalité, on est prêt à montrer que $\mathscr{HS}(H)$ est muni d'une structure d'espace de Hilbert. En effet, si $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}\in\mathscr{HS}(H)^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme Hilbert-Schmidt, alors elle l'est aussi, en particulier, pour la norme d'opérateur. Par complétude de l'espace $\big(\mathscr{L}_c(H),\|\cdot\|_{\mathscr{L}_c(H)}\big)$, il existe donc un élément $T \in \mathscr{L}_c(H)$ tel que (T_m) converge vers T en norme d'opérateur. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_m e_n - Te_n\| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0, \quad \text{et donc} \quad \|T_m e_n\| \xrightarrow[m\to+\infty]{} \|Te_n\|.$$

Or, le fait que (T_m) soit de Cauchy dans $\mathscr{HS}(H)$ indique que la suite $\big((\|T_m e_n\|)_{n\in\mathbb{N}}\big)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$ et donc, par complétude de cet espace, converge vers une suite de $\ell^2(\mathbb{N})$, qui ne peut être que $(\|Te_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$! En effet, si $\big(u^{(m)}\big)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ converge vers $u \in \ell^2(\mathbb{N})$, on a en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(m)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} u_n.$$

Ainsi, par unicité de la limite simple dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on a donc que $(\|Te_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est cette limite et est donc dans $\ell^2(\mathbb{N})$, ce qui veut exactement dire que $T \in \mathscr{HS}(H)$! Il ne reste plus qu'à montrer que $T_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathscr{HS}(H)} T$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T_m e_n - Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T_m e_n\|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_m e_n, Te_n\rangle\right).$$

Or, on vient de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T_m e_n\|^2 \xrightarrow[m\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2,$$

et on a vu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_m e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} Te_n.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle T_m e_n, Te_n\rangle \xrightarrow[m\to+\infty]{} \|Te_n\|^2$$

et on a la domination :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad |\langle T_m e_n, Te_n\rangle| \leqslant \|T_m\|_{\mathscr{L}_c(H)} \|Te_n\| \leqslant \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \|T_m\|_{\mathscr{L}_c(H)}\right) \|Te_n\| \in \ell^2(\mathbb{N})$$

indépendamment de m ! Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_m e_n, Te_n\rangle\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 2\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2$$

ce qui montre donc :

$$\|T_m - T\|_{\mathscr{HS}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0,$$

ce qu'on voulait démontrer !

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons P_k le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel $F_k := \mathrm{Vect}\,(e_n, n \in [\![0, k]\!])$. Montrons que pour tout $T \in \mathscr{HS}(H)$, $TP_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathscr{HS}(H)} T$. Déjà, TP_k est bien élément de $\mathscr{HS}(H)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|TP_k e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{k} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

De plus, on remarque que TP_k est un opérateur de rang fini, étant donné que son image est égale à $T(F_k)$

qui est de dimension finie étant donné que F_k est de dimension finie. Enfin, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|TP_k e_n - Te_n\|^2 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \|Te_n\|^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

étant donné que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2$ converge. Ainsi, on a montré :

$$TP_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathscr{HS}(H)} T,$$

et donc les opérateurs de rang fini sont denses dans $(\mathscr{HS}(H), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{HS}})$! Ainsi, en particulier, grâce à la continuité de l'injection dans $\mathscr{L}_c(H)$, on a que T est limite dans $\mathscr{L}_c(H)$ d'opérateurs de rang fini, donc compacts. Étant donné que l'ensemble $\mathscr{K}(H)$ des opérateurs compacts est un fermé de $\mathscr{L}_c(H)$, on a que $T \in \mathscr{K}(H)$: les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts !

4. (Si le temps) On utilise le fait suivant, qu'on ne démontrera pas dans le développement :

> **Proposition 4.3** (Base hilbertienne de L^2 dans un espace produit)**.** Avec les notations de l'énoncé, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)$, alors, si on définit, pour $f,g\in\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)$:
>
> $$f\otimes g \quad : \quad \begin{array}{rcl} \Omega^2 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x)g(y) \end{array}$$
>
> on a que la famille $(e_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} := (e_n\otimes\overline{e_p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2\left(\Omega^2,\mathscr{F}\otimes\mathscr{F},\mu\otimes\mu\right)$.

Éléments de démonstration. On montre dans un premier temps que le sous-espace vectoriel $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)\otimes\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ engendré par les fonctions $f\otimes g$ pour f et g parcourant $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ est dense dans $\mathrm{L}^2\left(\Omega^2,\mathscr{F}\otimes\mathscr{F},\mu\otimes\mu\right)$ en montrant que, si F est dans l'orthogonal de cet espace et si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{F}$ de mesure finie et d'union Ω, alors l'ensemble des éléments $T\in\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}$ tels que :

$$\iint_{T\cap(A_n\times A_n)} F(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) = 0$$

est une classe monotone contenant les éléments $A\times B$ pour $A,B\in\mathscr{F}$. Ainsi, cette classe monotone est égale à $\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}$ par le théorème des classes monotones, de sorte que, en prenant pour T les ensembles mesurables $\{\mathrm{Re}(F)<0\}$, $\{\mathrm{Re}(F)>0\}$, $\{\mathrm{Im}(F)<0\}$ et $\{\mathrm{Im}(F)>0\}$, on a que $F=0$ presque partout sur $A_n\times A_n$. Ainsi :

$$\iint_{A_n\times A_n} |F(x,y)|\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) = 0$$

et donc, par convergence monotone, on peut faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\iint_{\Omega^2} |F(x,y)|\mathrm{d}(\mu\otimes\mu)(x,y) = 0.$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à voir que la famille $(e_n\otimes\overline{e_p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille totale de $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)\otimes\mathrm{L}^2(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ et donc une famille totale de $\mathrm{L}^2\left(\Omega^2,\mathscr{F}\otimes\mathscr{F},\mu\otimes\mu\right)$. □

Maintenant, si $K\in\mathrm{L}^2\left(\Omega^2,\mathscr{F}\otimes\mathscr{F},\mu\otimes\mu\right)$, alors, en notant, pour $n,p\in\mathbb{N}$:

$$k_{n,p} := \langle K, e_{n,p}\rangle = \iint_{\Omega^2} K(x,y)\overline{e_n(x)}e_p(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y),$$

on se rend compte que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad k_{n,p} = \langle T_K e_p, e_n \rangle.$$

Ainsi, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |k_{n,p}|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T_K e_p, e_n \rangle|^2 = \|T_K e_p\|^2$$

d'après l'égalité de Bessel-Parseval. Or, $(e_{n,p})$ forme une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2\left(\Omega^2, \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes \mu\right)$, et donc, encore par l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \|T_K e_p\|^2 = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |k_{n,p}|^2 = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |\langle K, e_{n,p} \rangle|^2 = \|K\|^2_{\mathrm{L}^2(\mu\otimes\mu)} < +\infty.$$

On a donc montré non-seulement que l'application du point 4. était bien définie, mais qu'en plus il s'agissait d'une isométrie linéaire (vérifiez la linéarité si vous voulez) ! Maintenant, prenons $T \in \mathscr{HS}(H)$ (rappelons que H désigne ici l'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$) et posons, dans le même esprit que précédemment, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$k_{n,p} := \langle T e_p, e_n \rangle.$$

On a :

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} |k_{n,p}|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle T e_p, e_n \rangle|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|T e_p\|^2 = \|T\|_{\mathscr{HS}} < +\infty.$$

Ainsi, $(k_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in \ell^2(\mathbb{N})$, de sorte que cette suite définisse un unique élément $K \in \mathrm{L}^2\left(\Omega^2, \mathscr{F} \otimes \mathscr{F}, \mu \otimes \mu\right)$ tel que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \langle K, e_{n,p} \rangle = k_{n,p}.$$

Plus explicitement, il s'agit de l'élément :

$$K = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} k_{n,p} e_{n,p}.$$

Montrons donc que $T = T_K$. Pour cela, on utilise le point 3 : soit P_N l'opérateur de projection sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_n, 0 \leqslant n \leqslant N)$. On observe que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall f \in H, \quad T P_N f = T\left(\sum_{p=0}^{N} \langle f, e_p \rangle e_p\right) = \sum_{p=0}^{N} \langle f, e_p \rangle T e_p = \sum_{p=0}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_p \rangle k_{n,p} e_n.$$

En posant alors, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$K_N := \sum_{p=0}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty} k_{n,p} e_{n,p},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N},\ \forall f \in H, \quad T_{K_N} f &= \int_\Omega \left(\sum_{p=0}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty} k_{n,p} e_n(x) \overline{e_p(y)}\right) f(y) \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \sum_{p=0}^{N} \left(\int_\Omega \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} k_{n,p} e_n(x)\right)}_{\text{indépendant de } y} \overline{e_p(y)} f(y) \mathrm{d}\mu(y) \right) \\
&= \sum_{p=0}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty} k_{n,p} e_n \langle f, e_p \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $TP_N = T_{K_N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Or, on a montré que :

$$TP_N \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathscr{HS}(H)} T.$$

Ainsi, il suffira de montrer que $T_{K_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathscr{HS}(H)} T_K$ pour conclure ! Or, par le caractère isométrique de l'application $K \mapsto T_K$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \|T_{K_N} - T_K\|_{\mathscr{HS}}^2 = \|K_N - K\|_{\mathrm{L}^2(\mu\otimes\mu)}^2 = \sum_{p=N+1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |k_{n,p}|^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

étant donné que $(k_{n,p}) \in \ell^2\left(\mathbb{N}^2\right)$! Ainsi, on a bien :

$$TP_N = T_{K_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathscr{HS}(H)} T_K$$

et donc, par unicité de la limite, $T = T_K$, ce qui conclut !

$\square$